

Seconde - DM1. A
le crible d'Ératosthène.

- 1) Les entiers non banés sont les entiers n'ayant aucun diviseur d inférieur à eux (sinon ils auraient été banés en tant que multiples de d), hormis 1. Donc leurs seuls diviseurs sont 1 et eux-mêmes: ils sont premiers.
- 2) $\sqrt{1000} \approx 31,62$, donc il faut bannir les multiples des nombres premiers inférieurs ou égaux à 32, c'est-à-dire jusqu'au nombre premier $p=31$.
- 3) Supposons que n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$ (*), et que n est composé (i.e. non premier).

Comme n est composé, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, n admet une décomposition en facteurs premiers unique.

$$n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_i$$

D'après notre hypothèse (*), chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_i$ est strictement supérieur à $\sqrt{n}$.

Donc $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_i > (\sqrt{n})^i$, avec $i \geq 2$ car n composé admet au moins deux facteurs premiers.

$$\text{Donc } p_1 \times p_2 \times \dots \times p_i > (\sqrt{n})^i > \underbrace{(\sqrt{n})^2}_{n}$$

$$\underbrace{p_1 \times p_2 \times \dots \times p_i}_n > n$$

en aboutit à une contradiction.

Donc n est premier.